

Partie A

1.
  - Le point M est défini par  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$ , donc il appartient à la droite (AB), et donc au plan (FAB). On en déduit que la droite (FM) est une droite incluse dans le plan (FAB).
  - Le plan (FAB) contient la face ABFE du cube. Comme les faces du cube sont des carrés, on en déduit que la droite (FG) est perpendiculaire à la droite (EF) (via le carré EFGH) et à la droite (FB) (via le carré BCGF).  
Ainsi, (FG) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (FAB) : on en déduit que (FG) est orthogonale au plan (FAB).
  - Puisque (FG) est orthogonale à (FAB), elle est donc également orthogonale à toute droite du plan (FAB), notamment la droite (FM).
  - Comme F est un point d'intersection entre (FB) et (FM), les droites sont orthogonales et sécantes, on peut donc conclure que les droites sont bien perpendiculaires.
2.
  - On a déjà établi que M est sur la droite (AB), avec :  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AB}$  ;
  - Comme ABCDEFGH est un cube, on a notamment :  $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB}$  ;
  - On en déduit donc :  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{HG}$  ;
  - Les droites (AM) et (HG) sont dirigées par des vecteurs directeurs colinéaires, donc elles sont parallèles, et donc coplanaires ;
  - cela implique que les quatre points A, M, H et G sont également coplanaires.

Partie B

Le repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$  est un repère orthonormé de l'espace : les vecteurs de base sont deux à deux orthogonaux et de même norme, car ils sont basés sur les arêtes consécutives d'un cube.

On a alors les coordonnées : A(0 ; 0 ; 0) ; B(1 ; 0 ; 0) ; C(1 ; 1 ; 0) ; D(0 ; 1 ; 0) ; E(0 ; 0 ; 1) ; F(1 ; 0 ; 1) ; G(1 ; 1 ; 1) ; H(0 ; 1 ; 1) et M(2 ; 0 ; 0).

1. On a : 
$$\overrightarrow{GM} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et, comme A est l'origine du repère, les coordonnées de H sont aussi celles du vecteur 
$$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ces coordonnées sont clairement non proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

2. a. (GM) passe par le point G de coordonnées (1 ; 1 ; 1) et est dirigée par 
$$\overrightarrow{GM} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Une représentation paramétrique de (GM) est donc :

$$\begin{cases} x = x_G + t x_{\overrightarrow{GM}} \\ y = y_G + t y_{\overrightarrow{GM}} \\ z = z_G + t z_{\overrightarrow{GM}} \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

- b. Cherchons s'il est possible qu'un point de paramètre  $t$  sur (GM) ait les mêmes coordonnées qu'un point de paramètre  $k$  sur (AH). Pour cela, résolvons le système :

$$S: \begin{cases} 1+t=0 \\ 1-t=k \\ 1-t=k \end{cases} \quad \text{on a : } S \iff \begin{cases} t=-1 \\ k=1-(-1) \\ k=1-(-1) \end{cases} \quad \text{Soit } S \iff \begin{cases} t=-1 \\ k=2 \\ k=2 \end{cases}$$

On en déduit que seul un point est commun aux deux droites, c'est le point de paramètre  $t = -1$  sur (GM), qui est aussi le point de paramètre  $k = 2$  sur (AH).

Qu'on utilise une représentation paramétrique ou l'autre pour trouver les coordonnées de N, on a bien :  $N(1+(-1); 1-(-1); 1-(-1))$  c'est-à-dire  $N(0; 2; 2)$ .

3. a. On a :  $\vec{AM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , et  $\vec{AN} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Comme le repère est orthonormal, on peut calculer le produit scalaire à l'aide des coordonnées :  $\vec{AM} \cdot \vec{AN} = 2 \times 0 + 0 \times 2 + 0 \times 2 = 0$ .

Les vecteurs sont donc orthogonaux, donc les droites (AM) et (AN) sont orthogonales (et sécantes en A), donc perpendiculaires :

Le triangle AMN est bien rectangle en A.

- b. Le repère est orthonormal donc on peut aussi calculer des longueurs avec les coordonnées :

$$AM = \sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2, \quad AN = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Avec [AM] pour base, la hauteur correspondante est [AN] puisque le triangle est rectangle en A.

$$\text{On a donc : } \mathcal{A}_{AMN} = \frac{AM \times AN}{2} = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

4. a. J est le centre de BCGF, donc notamment le milieu de [BG] :

$$J = \left( \frac{x_B + x_G}{2}; \frac{y_B + y_G}{2}; \frac{z_B + z_G}{2} \right), \quad \text{soit } J \left( \frac{1+1}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{0+1}{2} \right).$$

Finalement, les coordonnées de J sont :  $J(1; 0,5; 0,5)$ .

b. On a :  $\vec{FJ} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0,5-0 \\ 0,5-1 \end{pmatrix}$  soit :  $\vec{FJ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Vérifions : } \vec{FJ} \cdot \vec{AM} = 0 \times 2 + 0,5 \times 0 + (-0,5) \times 0 = 0.$$

$$\text{et, par ailleurs : } \vec{FJ} \cdot \vec{AN} = 0 \times 0 + 0,5 \times 2 + (-0,5) \times 2 = 0.$$

Donc  $\vec{FJ}$  est orthogonal à deux vecteurs formant une base de (AMN) : c'est bien un vecteur normal au plan (AMN).

- c. Puisque  $\vec{FJ}$  est normal à (AMN), on en déduit qu'(AMN) admet une équation de la forme :  $0 \times x + 1 \times y + (-1) \times z + d = 0$ , soit  $y - z + d = 0$  où  $d \in \mathbb{R}$ .

Comme  $A(0; 0; 0)$  est sur (AMN), ses coordonnées doivent vérifier l'équation, donc :

$$0 - 0 + d = 0 \iff d = 0.$$

Finalement, une équation de (AMN) est  $y - z = 0$ .

$$\text{En testant l'appartenance de J à (AMN) : } y_J - z_J = 0,5 - 0,5 \\ = 0$$

Les coordonnées de J vérifient l'équation du plan, donc J appartient au plan (AMN).

Comme  $\vec{FJ}$  est orthogonal au plan et que J est dans le plan, J est bien le projeté orthogonal de F sur (AMN).

5. Pour déterminer le volume du tétraèdre AMNF, on choisit comme base le triangle AMN, la hauteur correspondante étant [FJ].

$$\mathcal{V}_{\text{AMNF}} = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times \text{FJ} \quad \text{où} \quad \text{FJ} = \sqrt{0^2 + 0,5^2 + 0,5^2} = \sqrt{0,5} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{On a donc : } \mathcal{V}_{\text{AMNF}} = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}.$$

Pour la pyramide BCGFM, la base (seule face non triangulaire) le carré BCGF (carré de côté 1, donc d'aire 1), la hauteur étant la distance entre M et le plan (BCG).

Comme on a déjà établi que M est un point de (AB), et que ABCDEFGH est un cube, on en déduit que (BM) est perpendiculaire au plan (BCG) et que B est donc le projeté orthogonal de M sur (BCG). La distance entre M et (BCG) est donc  $\text{BM} = \text{AB} = 1$ .

$$\mathcal{V}_{\text{BCGFM}} = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}.$$

Donc on a bien :  $\mathcal{V}_{\text{AMNF}} = 2 \times \mathcal{V}_{\text{BCGFM}}$ .